数理解析研究所講究録
78巻 1969年 66-75

複素曲面についての いくつかの未解決の問題

東大 理　小平邦彦

曲面の理論で分からぬまゝに残っているいくつかの問題について述べる。

曲面といえば2次元の compact complex manifold を意味するものとする。これを一般に S で表わす。以下第一種の例外曲線を含まない S のみを考える。すると次のような表が得られる（Kodaira: On the structure of complex analytic surfaces IV, Amer. J. Math. 90 (1968), 1048-1066）。

Class		b_1	P_{12}	P_2	K	$c_1^2=K^2$	Kähler か
1	$\mathbb{P}^2$ or ruled	偶	0	0			yes
2	K3	0	1	1	0	0	?
3	complex torus	4	1	1	0	0	yes
4	elliptic	偶	正		≠0	正	?
5	一般型の代数曲面	偶	正	正	≠0	正	yes
6	elliptic	奇	正			0	no
7	?	1	0	0		≦0	no

$b_\nu = \nu$ 次元 Betti 数, $c_i = i$-th Chern class,
$K =$ canonical divisor class,
$P_m = \dim H^0(S, \mathcal{O}([mK]))$.

これらの類は deformation で変らない. 1から5まではすでに Enriques の本 (Le Superficie Algebriche, 1949) でも論じられた. 6と7は代数曲面でないから勿論 Enriques にはのっていない.

問題 I. number of moduli $\mu(S)$

定義 Sをふくむ effectively parametrized complete family $\{S_t \mid t \in \mathbf{C}^\mu, |t| < \varepsilon\}$, $S = S_0$, が存在するとき $\mu(S) = \mu$ と定義する.
(Class 1, 7 では $\mu(S)$が定義されないものが多い.)

倉西の定理によれば

$$\dim H^1(S, \Theta) \geqq \mu(S) \geqq \dim H^1(S, \Theta) - \dim H^2(S, \Theta),$$

ただし Θ は holomorphic vector field の sheaf である. この式の右辺は RR 定理により

$$\dim H^1(\Theta) - \dim H^2(\Theta) = 10(p_a + 1) - 2c_1^2 - \dim H^0(\Theta)$$

と書ける.

問題 "一般に" $\mu(S) = \dim H^1(S, \Theta)$ か?

$H^2(\Theta) = 0$ なら確かに成立つ訳である.

class 1, 2 では　$H^2(\Theta)=0$, よって O.K.

〃　3　では　　　　　　　　　O.K.

〃　4, 6　では, A. Kas の研究で, 一般に O.K. だが反例もあることが判った.

〃　7　では, 知られた曲面は Hopf surface しかなく, その時には $H^2(\Theta)=0$ で O.K.

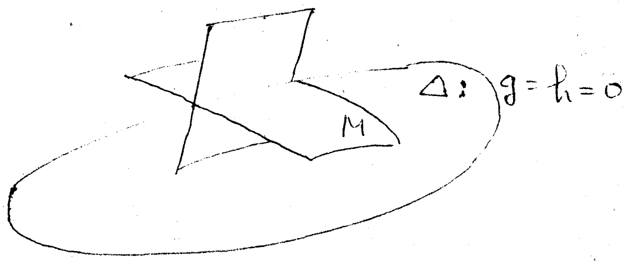
[Hopf surface とは, universal covering space が $\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}$ になるような曲面である.]

よって, class 5 即ち一般型の代数曲面に対して

$\mu(S)=\dim H^1(\Theta)$?

代数曲面 S の双有理モデル $M\subset\mathbb{P}^3$: $f(z_0, z_1, z_2, z_3)=0$ を考える. 方程式 f が generic なら M は non-singular, よって $S=M$ となり, この場合は $\mu=\dim H^1(\Theta)$ が確められる. もっと複雑な場合を考えよう.

i)　$f=g^2+Agh+Bh^2$,　こゝに g は r 次, h は $s\,(<r)$ 次, A は $r-s$ 次, B は $2(r-s)$ 次の, それぞれ generic な同次式とする. この M の singular locus Δ は $g=h=0$ で, M は Δ に沿って図のように簡単な特異性を有し, 3重点をもたない



このとき

$$\mu(S)=\binom{r+3}{3}+\binom{s+3}{3}+\binom{2r-2s+3}{3}-\binom{r-2s+3}{3}-4\,\delta_{r,\,s+1}-17.$$

$\dim H^1(\Theta)$ の方は計算できていない.

$r=s+1$ のとき S は $\mathbb{P}^4$ の中の complete intersection になり, $\mu(S)=\dim H^1(\Theta)$ が成立つ.
$r>s+1$ のときはよく判らない. μ を求めるために cohomological な量 $H^1(\Theta)$ 等を用いるという立場からすれば, $H^1(\Theta)$ よりも μ の方が計算し易いのは皮肉なことである

Max Noether が number of moduli として与えた公式は

$$\mu=10(p_a+1)-2c_1^2 \quad (=-\chi(\Theta))$$

であって, 彼の計算した例はすべて都合よく $H^2(\Theta)=0$ になっている.

$g^2 + Agh + Bh^2 = 0$

$r = s+1$ のとき

r	3	4	5	6	7
$\mu(S)$	20 (K3)	44	80	129	193
$\dim H^2(\Theta)$	0	0	10	25	81

Noether の例

$s = 1$ のとき

r	3	4	5
μ	38	96	188
$-\chi(\theta) = 10(p_a+1) - 2c_1^2$	38	58	100
$\dim H^2(\theta)$	0だろう	+	

Noether

ii) S が $\mathbb{P}^2$ の cyclic branched covering で branch curve が non-singular の場合

Wavrik : Amer. J. Math. 90 (1968) が計算して $\mu = \dim H^1(\Theta)$ を確めた.

iii) 稀な S. 曲面 S の index $\tau(S)$ は, Hirzebruch の定理によって $\frac{1}{3}[c_1^2 - 2c_2]$ に等しい. さて A. J. H. M. Van de Ven (On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, PNAS. 55 (1966), 1624-1627) によれば，たいていの知られた S に対して $\tau(S) \leq 0$ である．$\tau(S)$ が正になるような，めずらしい S は，2つの種類が知られている．ひとつは Hirzebruch が調べたもので，universal covering $\tilde{S}$ が disk $D = \{(z_1, z_2) \mid |z_1^2| + |z_2^2| \leq 1\}$ になるもの，即ち $S = D/G$ の形の曲面である．これについては Calabi-Vesentini の定理から $H^1(\Theta) = 0$ だから μ も 0 になる．(Hirzebruch: Autom. Formen u. der Satz von Riemann-Roch, Symp. Inter. Top. Alg., Mexico.)

もうひとつは Kodaira と Atiyah が調べたもので，S から non-singular curve C への holomorphic map $\pi: S \to C$ があり，π は singular fibre をもたず，2つの fibres は一般に解析的同型でないようなものである (Kodaira, A certain type of irregular algebraic surface, J. d'Analyse Math., 19 (1967)). これについては A. Kas: On deformations of a certain type of irregular algebraic surface, Amer. J. Math. 90 (1968), 1789-804) によって $\mu = \dim H^1(\Theta)$ が証明された．

問題 II. 1次元 Betti 数が偶数なら曲面は Kähler か.

class 2 (K3) と class 4 (elliptic) とが問題になる. Kas に出したが判らなかった. これらは代数曲面の deformation になっているから, "Kähler surface の deformation は Kähler か?" という問題にもなる. 3次元以上では Kähler の変形が Kähler にならない広中の反例がある.

問題 III. (Topology). 曲面 S_0 が与えられたとき, S_0 と homeomorphic な S を全部求めよ.

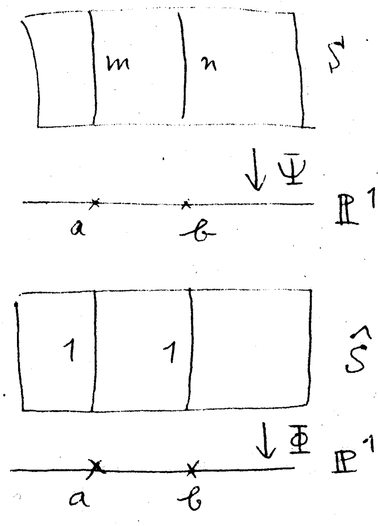
これはむつかしい問題で, $S_0 = \mathbb{P}^2$ の時でさえまだ完全に解けていない.

class 2 について: K3 surface と homotopy type が同じものは i) K3 又は ii) elliptic surface S で高々2つの multiple fibres をもつもの

$$S_{m,n} = L_m L_n(\hat{S})$$

($\hat{S}$ の fibre を multiple fibre におきかえる)

で m, n 奇, $(m,n)=1$.



(to appear : de Rham 65才記念論文集)
問題は，$S_{m,n}$ と S_0 は topological に homeomorphic かというtopologyの問題になる．$P_m(S_{1,n}) = \left[\frac{m(n-1)}{n}\right]$ になるので，plurigenera P_m が topological invariant ~~かどうか~~ ならば $S_{1,n}$ は S_0 と位相同型でない．P_m は飯高によれば deformation で不変であるが，topological invariant かどうか判っていない．

註($P_1 = p_g$, q , c_1^2 等は topological invariant である．$\tau(S) = \frac{1}{3}[c_1^2 - 2c_2]$ で c_2 = Euler標数，ても位相的な量だから c_1^2 も位相不変量．従って $\chi(\mathcal{O}_S) = p_g - q + 1 = \frac{1}{12}[c_1^2 + c_2]$ も位相不変量で，$q = \frac{1}{2}b_1$ だから p_g も位相不変量．)

IV. Pluri-canonical model

S を一般型の代数曲面とする．$\mathcal{L}_m = H^0(S, \mathcal{O}([mK]))$ の base $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$, $n = P_m - 1$, を用いて meromorphic map $\Phi_m : S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ が作られる．m が十分大きければ Φ_m は holomorphic かつ birational で，像 $\Phi_m(S)$ は normal variety である．

Kodaira: Pluricanonical system on alg. surfaces of general type. J. Math. Soc. Japan 20 (1968). (彌永記念号)に得られた結果は

Th. i) $m \geqq 6$ なら Φ_m は holo. birat.

ii) $p_g \geqq 4$ なら $m \geqq 3$ で同じことがいえる.

その後得た結果では

Th. 1) $m \geqq 9$ なら $\Phi_m(S)$ は normal

2) $K^2 = 1$ で $p_g = q = 0$ のときを除けば, $m \geqq 8$ で $\Phi_m(S)$ が normal になる.

3) $p_a = p_g - q \geqq 3$ ならば $m \geqq 6$ で normal.

問題: m の下限を下げるか, 又は下げられない例を作れ.

(註. 10月に小平教授が名大で行われた講義では, 前の定理は

Th. i) $m \geqq 5$ なら Φ_m は holo. birat.,

ii) $K^2 \geqq 2$ なら Φ_4 が holo. birat.

iii) $K^2 \geqq 3$ で $p_g \geqq 3$ なら Φ_3 が holo. birat.

と改良され, これが best possible であることも述べられた. $\Phi_m(S)$ の normality についてはまだ問題が残っているようである.)

S が $\pi(C) = 0$, $C^2 = -2$, なる既約曲線 C を含むとき, $K \cdot C = 0$ だから $\Phi_m(C)$ は1点になり, S は仮定により第1種

例外曲線を含まないから $\Phi_m(C)$ は $\Phi_m(S)$ の特異点である。よって、こういう C が存在する時には m をいくら大きくしても $\Phi_m(S)$ は non-singular にはならないが、$\bigcup C_i$ をこのような C のすべての和とすると、Φ_m は $m \geqq 6$ に対し $S - \bigcup_i C_i$ 上で biregular になる。

（以上、小生のノートに基いて、講演と質疑のとき小平教授の話されたことをも適当にまとめ多少の註をつけたもので、文責は松村にあります。名大、松村英之記。）